Le théorème de Sarkovskii

Reda Belhaj - Anas El Baghdadi - Mathieu Gomez

2016-2017

Dans toute la suite, on prendra $I = [0,1]$ et une fonction continue $f : I \longrightarrow I$.

1 Notations diverses

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f^n désigne la composée de f n fois avec elle même.
- Soit $A = [a,b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. ∂A désigne les extrémités de A, c'est à dire l'ensemble {a,b}.
- L'abréviation TVI désigne le théorème des valeurs intermédiaires.

2 Définitions préliminaires

Définition 1

Soit $n \geq 1$. Un point $x \in I$ est dit de période n *lorsque :*

i) $f^n(x) = x$

ii) $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ f^k(x) \neq x$

Définition 2 (*Orbite*)

On définit l'orbite d'un point $x \in I$ par

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) |\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Définition 3 (*Ordre de Sarkovskii*)

On appelle Ordre de Sarkovskii *l'ordre sur $\mathbb{N}^*$ défini de la manière suivante :*

$$3 \succ 5 \succ \ldots \succ 2 \times 3 \succ 2 \times 5 \succ \ldots \succ 2^n \times 3 \succ 2^n \times 5 \succ \ldots$$

$$\succ 2^{n+1} \times 3 \succ 2^{n+1} \times 5 \succ \ldots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \ldots \succ 4 \succ 2 \succ 1$$

De manière plus précise (mais moins visuelle) : Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Ecrivons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n & = & 2^{v_2(n)}a \\ m & = & 2^{v_2(m)}b \end{array} \right.$$

avec $a, b \geq 1$ (nécessairement impairs). On a $n \succ m$ si et seulement si l'une de ces quatre conditions est vérifiée :

i) $a, b = 1$ *et* $v_2(n) > v_2(m)$

ii) $b = 1$ *et* $a \geq 2$

iii) $2 \leq a < b$ *et* $v_2(n) = v_2(m)$

iv) $a, b \geq 2$ *et* $v_2(n) < v_2(m)$

Ensuite, on pose $n \succeq m$ ssi $n \succ m$ ou $n = m$.

Proposition 1

L'ordre de Sarkovskii est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}^*$

Démonstration : Celle-ci est simple mais lourde (il faut distinguer chaque cas), elle est disponible en annexe. ■

Le but de ce travail est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 (*Sarkovskii*)

Supposons que f admette un point périodique de période $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \succeq m$, f admet un point périodique de période m.

Définition 4 (*Graphe orienté*)

Formellement, un graphe orienté est un couple (V, E) avec V un ensemble fini et E un sous-ensemble de $V \times V$. V est appelé l'ensemble des sommets. E est appelé l'ensemble des arêtes. Ainsi, un couple $(K, K') \in E$ représente une arête $K \longrightarrow K'$

Définition 5 (*Graphe de Markov associé à une partition*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(I_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une suite finie d'intervalles fermés de I d'intérieurs disjoints deux à deux. Le graphe de Markov *associé à $(I_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est le graphe orienté Γ dont l'ensemble des sommets est $(I_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. Pour $(k, k') \in [\![1, n]\!]^2$ il y a une arête $I_k \longrightarrow I_{k'}$ si et seulement si $I_{k'} \subset f(I_k)$.*

Remarque 1

Même si les intervalles de cette suite ne sont pas tout à fait deux à deux disjoints, on continuera à parler de partition de I.

Définition 6 (*Chemin*)

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe orienté, et soit K, K' deux sommets de Γ. Un chemin de K à K' de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ *est une suite finie $(V_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ de sommets de Γ tels que :*

$$\begin{cases} V_1 = K \\ V_k = K' \\ \forall i \in [\![1, k-1]\!], (V_i, V_{i+1}) \in E \end{cases}$$

Définition 7 (*Partie compacte*)

Soit C une partie de $\mathbb{R}$. C est dite compacte *lorsque pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C, il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de C.*

Définition 8 (*Partie fermée*)

Soit F une partie de $\mathbb{R}$. F est dite fermée *lorsque toute suite convergente d'éléments de F converge vers un élément de F.*

Remarque 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A est compacte, alors A est fermée . En effet, soit A une partie compacte et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Comme A est compacte, il existe une extraction ϕ telle que $x_{\phi(n)} \longrightarrow l'$ avec $l' \in A$. Or $x_{\phi(n)} \longrightarrow l$ (suite extraite), donc par unicité de la limite $l = l'$, et on a bien $\boxed{l \in A}$.

3 Deux résultats importants

Proposition 2

Soit J_1, J_2 deux intervalles fermés de I tels que $f(J_1) \supset J_2$. Alors il existe un intervalle J_1' fermé inclus dans J_1 tel que $f(J_1') = J_2$.

Démonstration : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $J_2 = [a, b]$ Posons $\begin{cases} E_1 = \{x \in J_1 \mid f(x) = a\} \\ E_2 = \{x \in J_1 \mid f(x) = b\} \end{cases}$

E_1 et E_2 sont tous deux non vides (car a et b sont atteints par hypothèse). Montrons qu'ils admettent chacun un minimum :

Soit $s_1 = \inf(E_1)$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s_1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f(u_n) = a$ car $u_n \in E_1$. Donc $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (passage à la limite) Par unicité de la limite et par continuité de f, on en déduit $a = f(s_1)$, *i.e.* $s_1 \in E_1$. Donc E_1 possède un min. De même pour E_2.

De plus, on ne peut pas avoir égalité des minima (sans quoi un point de J_1 aurait deux images).

Supposons dans un premier temps que $\min(E_1) < \min(E_2)$ (on applique un raisonnement symétrique si $\min(E_1) > \min(E_2)$). Posons $\alpha = \max \underbrace{\{x \in E_1 \mid x < \min(E_2)\}}_{\textit{noté } B}$.

α est-il bien défini ? On sait que B est non vide par hypothèse (il contient $\min(E_1)$). De plus, B est majoré car $B \subset E_1 \subset J_1 \subset I$. Donc B admet un sup noté S. Montrons que $f(S) = a$, *i.e* $S \in B$.

On sait qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = a$ (car $B \subset E_1$). Puis $\begin{cases} f(u_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & f(S) & (\textit{continuité de } f) \\ f(u_n) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & a & (\textit{passage à la limite}) \end{cases}$

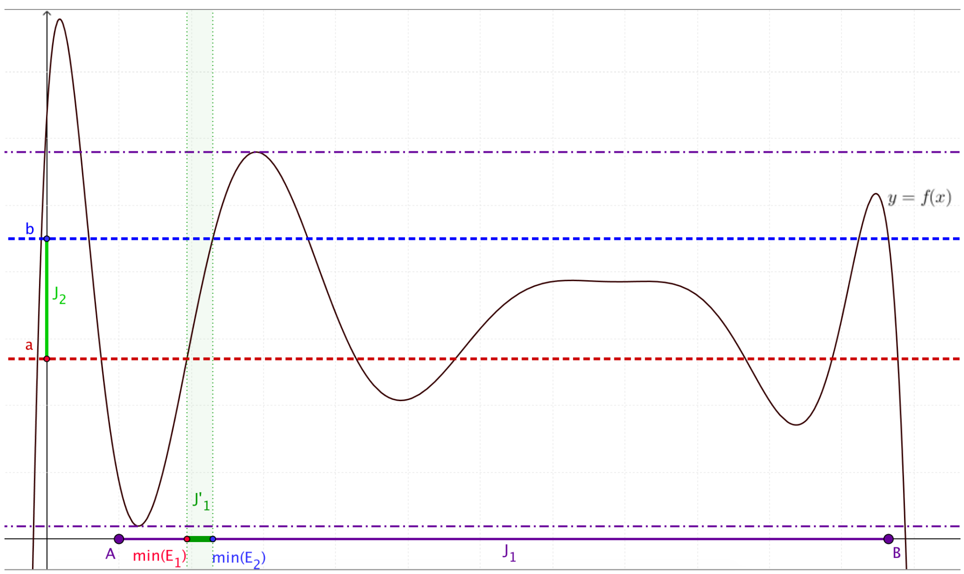

FIGURE 1 – Un exemple de construction dans le cas où $min(E_1) < min(E_2)$

Donc par unicité de la limite $f(S) = a$, et ainsi $\boxed{S \in B}$, ce qui autorise à considérer $\alpha = S$ le *max* de B. Posons alors $\beta = \min(E_2)$. On remarque que $[\alpha, \beta]$ est non trivial (car $\alpha < \beta$). Montrons que $f([\alpha, \beta]) = J_2$, ce qui suffira à prouver que $J_1' := [\alpha, \beta]$ convient.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in [\alpha, \beta]$. Supposons par l'absurde que $f(x) \notin [a, b]$

- Si $f(x) < a$, par le TVI il existe $y \in]x, \beta[$ tel que $f(y) = a$. Or $x < y < \beta$, donc $\begin{cases} y \in B \\ y > \alpha = max(B) \end{cases}$ ce qui est absurde.
- Si $f(x) > b$, par le TVI, il existe $y \in]\alpha, x[$ tel que $f(y) = b$. Donc $y \in E_2$. Or $y < \beta = min(E_2)$: absurde.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in J_2 = [a, b]$ On rappelle que $f(\alpha) = a$ et que $f(\beta) = b$. Comme f est continue, on a directement par le TVI l'existence d'un $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x) = y$. ■

Remarque 3

Nous venons de démontrer un résultat préliminaire que l'on utilisera très souvent dans la suite.

Lemme 1

Ce lemme comporte deux points :

1. *Soit $J \subset I$ un sous-intervalle de I tel que $J \subset f(J)$. Alors f a un point fixe dans $\bar{J}$.*
2. *Soit $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-intervalles fermés de I tels que pour tout $i \in \mathbb{N}, f(I_i) \supset I_{i+1}$. Alors il existe une suite d'intervalles fermés $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}^*, J_i \supset J_{i+1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, J_n \subset I_0 \text{ et } f^n(J_n) = I_n \end{cases}$$

De plus, il existe $x \in I_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) \in I_n$

Démonstration :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et posons $\bar{J} = [a,b]$. Par hypothèse, on sait que $\begin{cases} \exists x_a \in J, f(x_a) = a \\ \exists x_b \in J, f(x_b) = b \end{cases}$

   Posons alors $g = f - Id$. on a alors $\begin{cases} g(x_a) = f(x_a) - x_a = a - x_a \leq 0 \ (car\ a < x_a) \\ g(x_b) = f(x_b) - x_b = b - x_b \geq 0 \ (car\ x_b < b) \end{cases}$

   Donc par le TVI il existe un $x \in \bar{J}$ tel que $g(x) = 0$, i.e. $f(x) = x$. On a alors un point fixe, et le premier point est démontré.

2. Nous allons construire par récurrence $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   * Initialisation : Par la proposition précédente, comme $f(I_0) \supset I_1$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$
   * Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \leq n$, J_k ait été construit. Par hypothèse, on sait que $I_{n+1} \subset f(I_n)$.
     De plus, la proposition précédente garantit l'existence d'un $\tilde{I_n}$ inclus dans I_n tel que $f(\tilde{I_n}) = I_{n+1}$
     Or par hypothèse de récurrence, on sait que $f^n(J_n) = I_n \supset \tilde{I_n}$.
     Puis toujours par la proposition 2 : $\exists\ J_{n+1} \subset J_n, f^n(J_{n+1}) = \tilde{I_n}$
     En composant par f on a :
     $f^{n+1}(J_{n+1}) = f(\tilde{I_n}) = I_{n+1}$, puis $J_{n+1} \subset J_n \underbrace{\subset}_{par H.R} J_0$, ce qui achève la récurrence.

   Il reste enfin à montrer qu'il existe un point x de I_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* f^n(x) \in I_n$. La suite $(J_i)_{i\geq 1}$ forme une suite de compacts non vides décroissante pour l'inclusion : en effet, puisque pour tout $i \geq 1, J_i$ est fermé, toute suite à valeur dans J_i est bornée, et on conclut par le théorème de Bolzano-Wierstrass. Pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit un $x_n \in J_n$ (licite car les J_i sont non vides). On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (I_0)^{\mathbb{N}}$, donc par compacité il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\phi(n)} \longrightarrow l \in \mathbb{R}$. Soit $q \in \mathbb{N}$. Alors $\exists s \in \mathbb{N}, \phi(s) \geq q$, puis $\forall k \geq s, \phi(k) \geq q$, donc $\forall k \geq s, x_{\phi(k)} \in J_{\phi(k)} \subset J_q$.
   Enfin, en vertu de la remarque 2, J_q est fermé donc $l \in J_q$, et ce pour tout q. Par conséquent, $\bigcap J_i \subset I_0$ est non vide, donc on peut choisir $x \in I_0$ vérifiant les conditions demandées. ■

4 Période 3 implique chaos

Le but de cette partie est de démontrer une version plus faible [1] du théorème de Sarkovskii.

Théorème 2 (*Période 3 implique chaos*)

Si f admet un point périodique de période 3, alors f admet un point périodique de toute période.

Démonstration : Supposons que f ait un point périodique p_1 de période 3. Supposons aussi que l'orbite de p_1 s'ordonne en $p_1 < p_2 < p_3$ avec $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$ et $f(p_3) = p_1$ (l'autre cas se fait de la même manière). On pose $I_1 = [p_2, p_3]$ et $I_2 = [p_1, p_2]$, on obtient donc la partition [2] associée à l'orbite de p_1. Or $f(p_2) = p_3$ et $f(p_3) = p_1$, donc par le TVI, $I_1 \cup I_2 \subset f(I_1)$; de même, $I_1 \subset f(I_2)$. On a ainsi le Graphe de Markov associé :

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & I_2 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

— Montrons que f admet un point de période 1. D'après les hypothèses de départ : $I_1 \cup I_2 \subset f(I_1)$ donc en particulier $I_1 \subset f(I_1)$ et on conclut par la première partie du lemme 1.

1. mais un peu plus connue car assez surprenante...
2. ce n'est pas rigoureusement un partition, cf. remarque 1.

— Soit $m > 3$ et montrons que f admet un point de période m. Pour cela, choisissons dans le graphe de Markov, le chemin suivant :

$$\underbrace{I_1 \to I_1 \to ... \to I_1}_{m-2\ \textit{flèches}} \to I_2 \to I_1$$

- Par la deuxième partie du Lemme 1 appliqué à la famille $(I_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$, on construit $J = J_m$. On a ainsi $f^m(J) = I_1$, et $J \subset J_{m-1}$ (par construction), donc $f^{m-1}(J) \subset f^{m-1}(J_{m-1}) = I_2$. De même, $\forall i \in [\![1, m-2]\!]$, $J \subset J_i$, donc $\forall i \in [\![1, m-2]\!]$, $f^i(J) \subset f^i(J_i) = I_1$.
- Enfin, $J \subset I_1$. Ainsi, $J \subset f^m(J)$. Puis, $\exists x \in J\ ,\ f^m(x) = x$.
- Montrons que x est exactement de période m. On raisonne par l'absurde.
  - Soit i minimal [3] dans $[\![1, m-1]\!]$ tel que $f^i(x) = x$. Montrons que i divise m. Comme $i \neq 0$, on peut considérer la division eucidienne de m par i :

    $$\exists!(k, r) \in \mathbb{N}^* \times [\![0, i-1]\!], m = ik + r$$

    Or $f^m(x) = f^{ik+r}(x)$, donc $f^m(x) = f^r(f^{ik}(x))$. Par une récurrence immédiate $f^{ik}(x) = x$, donc $f^m(x) = f^r(x) = x$. Nécéssairement, $r = 0$ sans quoi i ne serait pas minimal.
  - Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}^*, m = ik$. Montrons ensuite par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$ H_q : $f^{iq-1}(x) = f^{i-1}(x)$
    - Initialisation : Pour $q = 1$, c'est immédiat.
    - Hérédité : Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{iq-1}(x) = f^{i-1}(x)$. On a $f^{i(q+1)-1}(x) = f^{iq-1+i}(x) = f^{iq-1}(f^i(x))$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $f^{i(q+1)-1}(x) = f^{i-1}(x)$ car $f^i(x) = x$.
  - Enfin, $f^{m-1}(x) \in I_2$ et $f^{i-1}(x) \in I_1$ car $i - 1 \in [\![0, m-2]\!]$ donc $f^{m-1}(x) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$. Finalement $x = f^m(x) = f(p_2) = p_3$. En suivant le trajet de x, $f(x) \in I_1$ donc $f(p_3) = p_1 \in I_1$−absurde.

— Pour montrer que f a un point de période 2, on regarde le chemin : $I_2 \to I_1 \to I_2$ et on conclut de même.

3. comme on a raisonné par l'absurde, il s'agit d'une partie *non vide* de $\mathbb{N}$.

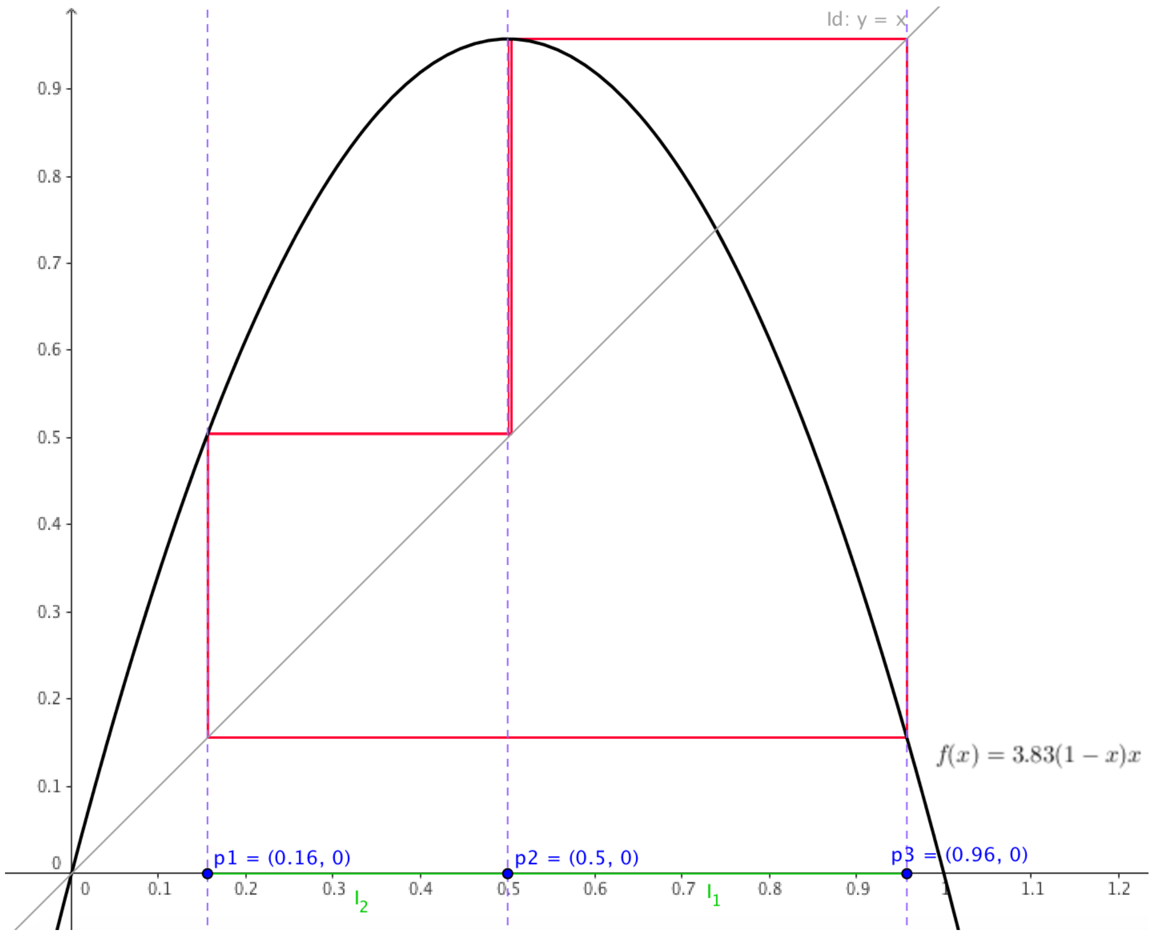

FIGURE 2 – Le point $p1$ est de période 3

■

5 Démonstration du théorème de Sarkovskii

Dans toute la suite, on suppose que f admet un point périodique x de période $n \geq 2$. On range alors les points de $\mathcal{O}(x)$ dans l'ordre croissant :

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$$

On obtient alors une partition [4] de I formée par les intervalles fermés $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-2$. On fixe Γ le graphe de Markov associé à cette partition. Dans toute la suite, on notera V l'ensemble des sommets de Γ.

4. cf. remarque 1.

Proposition 3

— *Supposons qu'il existe un chemin du graphe du type :*

$$I_k \longrightarrow I_{k+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{k+m-1} \longrightarrow I_k$$

On suppose aussi que $\forall i \in [\![k, k+m-1]\!], i \neq j \Rightarrow I_i \neq I_j$*, et que* $m \leq n$*. Alors, il existe un point de* I_k *de période* m*.*

— *Supposons qu'il existe un chemin du graphe du type :*

$$I_k \longrightarrow I_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_{k+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \longrightarrow I_k$$

On suppose aussi que $\forall i \in [\![k, j]\!], i \neq j \Rightarrow I_i \neq I_j$*. Si le chemin est de taille* l *(c'est-à-dire* l *flèches), alors il existe un point de* I_k *de période* l*.*

Démonstration :

— De la même façon que dans la démonstration "3 implique chaos", on sait qu'il existe $y \in I_k$ tel que $f^m(y) = y$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $i < m$ tel que $f^i(y) = y$. Alors, de la même manière, $i|m$ et par récurrence, on montre que : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{ik-1}(y) = f^{i-1}(y)$. Puis $f^i(y) = f^m(y)$, donc $f^{i-1}(y) \in I_{k+m-1}$. D'où $f^{i-1}(y) \in I_{k+m-1} \cap I_{i-1}$.

  * Si $I_{k+m-1} \cap I_{i-1} = \emptyset$, on a une contradiction.
  * Sinon, l'intersection est réduite à un point de l'orbite, et on peut donc écrire $f^{i-1}(y) = x_j \in \mathcal{O}(x)$. Donc $y = f(x_j) \in \mathcal{O}(x)$, on peut donc écrire $y = x_h$. Or, comme $m \leq n$, alors par transitivité $i < n$, et puisque $f^i(y) = y$, on a une contradiction car $y \in \mathcal{O}(x)$.

— De même, on a $f^l(y) = y$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $i < l$ tel que $f^i(y) = y$.
Or $i|l$ et, $\forall k \in \mathbb{N}, f^{ik-1}(y) = f^{i-1}(y)$. Enfin, $f^i(y) = f^l(y)$, donc $f^{i-1}(y) \in I_j$. D'où $f^{i-1}(y) \in I_j \cap I_{i-1}$.

  * Si $I_j \cap I_{i-1} = \emptyset$, on a une contradiction.
  * Sinon, l'intersection est réduite à un point de l'orbite, et on peut donc écrire $f^{i-1}(y) = x_j \in \mathcal{O}(x)$. Donc $y = f(x_j) \in \mathcal{O}(x)$, on peut donc écrire $y = x_a$. Deux cas se présentent :
    — Si il n'y a que deux intervalles I_k au début du chemin, puisque $f^l(y) = y$, alors $l \mid n$, et de même, $l-1 \mid n$, à cause du chemin :
    $$I_k \longrightarrow I_{k+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \longrightarrow I_k$$
    C'est absurde car $n \geq 2$.
    — Si il y a au moins trois intervalles au début du chemin, notons $I_k = [x_j, x_{j+1}]$. On a, comme y suit le chemin du graphe : $y \in I_k$, $f(y) \in I_k$, et $f(f(y)) \in I_k$. Sans perte de généralité, supposons que $y = x_j$. Alors, nécéssairement, $f(y) = x_{j+1}$, puis $f(f(y)) \in \{x_j, x_{j+1}\}$, absurde car $n \geq 2$. ■

Remarque 4

La proposition précédente nous servira de nombreuses fois dans la suite pour construire des points périodiques. Les hypothèses de la proposition peuvent paraître restrictives, mais elles suffisent pour construire les points périodiques dont nous aurons besoin.

Lemme 2

Il existe un sommet I_1 *du graphe tel que l'on ait une flèche de* I_1 *vers lui même.*

Démonstration : Faisons quelques remarques :

— L'orbite de x est contenue dans $[x_0, x_{n-1}]$. Comme $\mathcal{O}(x)$ est stable par f, $f(x_0) \in \mathcal{O}(x)$ et $f(x_{n-1}) \in \mathcal{O}(x)$, d'où $f(x_0) \geq x_0$ et $f(x_{n-1}) \leq x_{n-1}$. Or $n \geq 2$ donc $f(x_0) \neq x_0$ et $f(x_{n-1}) \neq x_{n-1}$. Finalement, $f(x_0) > x_0$ et $f(x_{n-1}) < x_{n-1}$.

— On considère $E = \{y \in \mathcal{O}(x) | f(y) > y\}$. $E \neq \varnothing$ ($x_0 \in E$) et E est fini en tant que sous-ensemble d'un ensemble fini. Notons x_M son max. Montrons que $I_1 = [x_M, x_{M+1}]$ convient, c'est-à-dire que $I_1 \subset f(I_1)$.

  • $f(x_M) \in \mathcal{O}(x)$ donc : $\exists n_0 \in [\![0, n-1]\!], f(x_M) = x_{n_0}$. De plus, $x_{n_0} > x_M$ (car $x_M \in E$) donc $x_{n_0} \geq x_{M+1}$ car les $(x_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ sont ordonnés.
  • Ensuite, $f(x_{M+1}) < x_{M+1}$ (car $x_{M+1} \notin E$ et ce n'est pas un point fixe) donc $f(x_{M+1}) \leq x_M$.

- Soit $y \in I_1$. $f(x_{M+1}) \leq x_M \leq y \leq x_{M+1} \leq f(x_M)$ donc $y \in f([x_M, x_{M+1}]) = f(I_1)$, ce qui achève la preuve. ■

$\boxed{\text{Dans toute la suite, on fixe un tel sommet } I_1 = [x_M, x_{M+1}]}$

Lemme 3

Soit K un sommet du graphe de Markov. Alors, il existe un chemin partant de I_1 et aboutissant en K.

Démonstration : Introduisons d'abord quelques notations :

— Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note V_i l'ensemble des extrémités de chemins du graphe de longueur i partants de I_1

— Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$U_i = \bigcup_{K \in V_i} K.$$

Avec ces notations, montrons d'abord le résultat suivant. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. S'il existe $K' \in V_i$ tel que $f(\partial K') \not\subset U_i$, alors $V_{i+1} \neq V_i$. Soit donc i et K' vérifiant les conditions. Remarquons d'abord que :

— $V_i \neq \emptyset$. En effet $I_1 \in V_i$, car on peut reboucler sur I_1 autant de fois que l'on veut.

— $V_i \subset V_{i+1}$ Il s'agit du même argument, on peut reboucler sur I_1 au début.

Notons $K' = [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ Par le TVI, $f(K')$ est un intervalle, notons le $[a,b]$. Montrons qu'il existe un intervalle $J' \subset f(K')$ dont $f(x_{i_0})$ est une borne.

— Si $f(x_{i_0}) = a$ ou b, il suffit de prendre $J' = [a,b]$

— Si $f(x_{i_0}) \in]\,a,b[$, posons $\alpha = \frac{f(x_{i_0})+b}{2}$. Alors, $J' = [f(x_{i_0}), \alpha]$ convient.

Ensuite, $f(x_{i_0}) \notin U_i$ (par hypothèse). Donc $J' \notin V_i$, sans quoi $f(x_{i_0}) \in \bigcup_{K\in V_i} = U_i$, ce qui est <u>absurde</u>. Ensuite, comme l'orbite de x est stable par f :

$$\begin{cases} \exists k \in [\![0, n-1]\!], f(x_{i_0}) &= x_k \\ \exists j \in [\![0, n-1]\!], f(x_{i_0+1}) &= x_j \end{cases}$$

Nécéssairement, $x_j \neq x_k$, sans quoi $|\mathcal{O}(x)| \neq n$. Distinguons deux cas :

— Si $x_k < x_j$:

  - Si $x_j = x_{k+1}$: on pose $J = [x_k, x_j]$, qui est un sommet de Γ.
  - Si $x_j \neq x_{k+1}$, on a nécéssairement $x_k < x_{k+1} < x_j$, on pose alors $J = [x_k, x_{k+1}]$ De cette façon, $J \notin V_i$ et $J \in V_{i+1}$

— Si $x_j < x_k$: c'est le même raisonnement.

On a prouvé le résultat. Enfin, la suite $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion, et $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ est fini (c'est un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de Γ, qui est fini). On en déduit que : $\exists i_s \in [\![1, n-1]\!], V_{i_s} = V_{i_s+1}$. En effet, il suffit de s'intéresser à la suite $(|I_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est croissante, majorée et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle est donc stationnaire, et donc $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire. De plus, $i_s \in [\![1, n-1]\!]$, car Γ contient $n-1$ sommets. Finalement, $U_{i_s} \cap \mathcal{O}(x)$ est stable par f, par le résultat intermédiaire prouvé. Donc $U_{i_s} \cap \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x)$. V_{i_s} est égal à l'ensemble des sommets du graphe. ■

Lemme 4

Supposons qu'il n'existe pas de sommet de Γ distinct de I_1 duquel on puisse partir pour aboutir en I_1 (il n'y a aucune flèche aboutissant en I_1 sauf la flèche partant de I_1). Alors :

— $\begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!], x_i \leq x_M \implies f(x_i) > x_M \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], x_i \geq x_{M+1} \implies f(x_i) < x_{M+1} \end{cases}$

— *n est pair.*

— *Il existe un point de I de période 2.*

Démonstration :

— *Par l'absurde, suppose qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_i \leq x_m$ et $f(x_i) \leq x_m$.*
Alors $E = \{x_j < x_M | f(x_j) \leq x_M\}$ est <u>non vide</u>. De plus, $E \subset \mathcal{O}(x)$, qui est <u>fini</u>. Donc E admet un max noté x_b. Comme $x_b \in E, f(x_b) \leq x_M$ (1).
De plus, par maximalité de $x_b, x_{b+1} \notin E$. Donc $f(x_{b+1}) > x_m$ (stabilité de $\mathcal{O}(x)$ par f) (2).

Donc par (1) et (2), $[f(x_b), f(x_{b+1})] \supset [x_M, x_{M+1}]$ donc $f([x_b, x_{b+1}]) \supset [f(x_b), f(x_{b+1}] \supset [x_M, x_{M+1}]$ (par le TVI).
Dans cette configuration, le graphe contiendrait une flèche $[x_b, x_{b+1}] \longrightarrow I_1$ ce qui est absurde par hypothèse.
Donc $\boxed{E = \emptyset}$. L'autre cas (à droite de I_1) se fait de la même manière. Le premier point est donc démontré.

— *Montrons que n est pair. Pour cela, posons Φ : $\begin{array}{ccc} \{x_0, \ldots, x_M\} & \longrightarrow & \{x_{M+1}, \ldots, x_{n-1}\} \\ x_j & \longmapsto & f(x_j) \end{array}$.*
Par i), $f(\{x_0, \ldots, x_M\}) \subset \{x_{M+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ donc Φ est bien définie.
En fait, en combinant les deux points de i) il vient que $f(\{x_0, \ldots, x_M\}) = \{x_{M+1}, \ldots, x_{n-1}\}$. Ainsi, Φ est surjective. L'injectivité vient du fait que l'orbite est stable par f et est de cardinal n. Donc Φ est bijective. Donc en passant aux cardinaux, on a

$$|\{x_0, \ldots, x_M\}| = |\{x_{M+1}, \ldots, x_{n-1}\}| := p$$

Or $\mathcal{O}(x) = \{x_0, \ldots, x_M\} \cup \{x_{M+1}, \ldots, x_{n-1}\}$ Donc $|\mathcal{O}(x)| = 2p = n$, d'où $\boxed{2|n}$

— *Montrons que f admet un point de période 2. Posons $\left\{ \begin{array}{l} J_0 = [x_0, x_M] \\ J_1 = [x_{M+1}, x_{n-1}] \end{array} \right.$ qui sont disjoints.*
Montrons que $\left\{ \begin{array}{l} f(J_0) \supset J_1 \\ f(J_1) \supset J_0 \end{array} \right.$
Soit $y \in J_1$. $\exists k_0 \in [\![m+1, n-2]\!], y \in [x_{k_0}, x_{k_0+1}]$. Par la premiere partie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists j_0 \in [\![0, m]\!], f(x_{j_0}) = x_{k_0} \\ \exists i_0 \in [\![0, m]\!], f(x_{i_0}) = x_{k_0+1} \end{array} \right.$$

Ainsi $y \in [f(x_{j_0}), f(x_{i_0})]$
  * *Si $x_{i_0} < x_{j_0}$, alors $[f(x_{j_0}), f(x_{i_0})] \subset f([x_{i_0}, x_{j_0}]) \subset f(J_0)$*
  * *L'autre cas $(x_{j_0} < x_{i_0})^5$ se fait de la même manière.*

Finalement, on a le chemin $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0$, et on conclut par la proposition 3 qu'il existe un point de période 2. ■

Lemme 5

Supposons que f admette un point de période impaire différente de 1. Considérons l'ensemble E des entiers impairs $k > 3$ tel qu'il existe un point de I de période k. On suppose dans ce lemme que x est de période $n = \min E$. Alors :

— *Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(J_i)_{1 \leq i \leq k} \in (V \backslash \{I_1\})^k$ de sommets de Γ tels que l'on ait un chemin de la forme*

$$I_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow J_k \longrightarrow I_1.$$

— *Si on choisit un tel chemin de taille minimale, alors nécessairement il est de taille $n-1$ et il est unique.*

Dans la suite du lemme, on notera ce chemin

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1.$$

— *Γ ne contient pas d'arête de la forme $I_j \longrightarrow I_{j+k}$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 2$*

— *Γ contient toutes les arêtes de la forme $I_{n-1} \longrightarrow I_{2i+1}$ avec $i \in \mathbb{N}$ et $2i+1 < n$.*

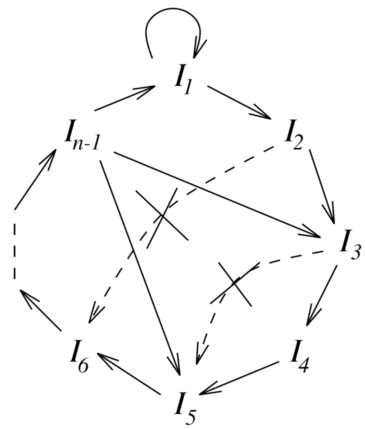

FIGURE 3 – Γ est donc de cette forme

Démonstration :

— — *n est impair, donc par contraposée du lemme 4 : il existe $J \in V \backslash \{I_1\}$ tel qu'on ait un chemin*

$$J \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_1$$

— *Par le lemme 3, il existe un chemin $I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow J$ En concaténant ces deux chemins, on obtient un chemin $I_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow J_k \longrightarrow I_1$.*

— *Par minimalité, les $(J_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont deux à deux distincts. Montrons alors que $k = n - 1$.*

— *Déjà, comme les $(J_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont deux à deux distincts et que Γ contient $n - 1$ sommets, on en déduit que $k \leq n - 1$.*

— *Supposons par l'absurde que $k < n - 1$:*

- *Si k est impair, alors f a un point de période k. En effet : $\forall i \in [\![2, k]\!], f(J_i) \supset J_{i-1}$, donc par une récurrence immédiate $f^k(I_1) \supset I_1$. Donc par la proposition 3, f a un point de période k, ce qui est absurde par minimalité de n.*
- *Si k est pair, considérons le chemin*

$$I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$$

De même, on obtient un point de période $k + 1$, alors que $k + 1$ est impair, absurde par minimalité de n. On a montré ii)

— *Démontrons le deuxième point. Par l'absurde, supposons que l'on ait une arête $I_j \longrightarrow I_{j+k_0}$ avec $\begin{cases} j \geq 1 \\ k_0 \geq 2 \end{cases}$*

Par le point précédent, il existe un chemin $I_{j+k_0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$, obtenu en tronquant le chemin

$$I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \longrightarrow I_{j+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{j+k_0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$$

De même, il existe des chemins $\begin{cases} I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \\ I_j \longrightarrow I_{j+k_0} \end{cases}$ On a donc le chemin

$$I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \longrightarrow I_{j+k_0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$$

— *Si k_0 est pair, $n - k_0 - 2$ est impair, absurde par la proposition 3.*

— *Si k_0 est impair, on considère*

$$I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_j \longrightarrow I_{j+k_0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$$

$n - k_0 - 1$ est impair et de même, c'est absurde par la proposition 3. On a donc montré le point ii)

— *Passons au dernier point. D'après le lemme 2, par construction on a le système suivant (S) : $\begin{cases} f(x_M) \geq x_{M+1} & (a) \\ f(x_{M+1}) \leq x_M & (b) \end{cases}$*

Or si (a) et (b) sont des égalités, x_M serait un point de période 2, absurde, car il est de période n. Ainsi (a) ou (b) est stricte.

— *Supposons que (b) est stricte*[6]*. Montrons alors que* $f(x_M) = x_{M+1}$ *et* $f(x_{M+1}) = x_{M-1}$.
Supposons par l'absurde que $f(x_M) \neq x_{M+1}$ ou $f(x_{M+1}) \neq x_{M-1}$.

- *Si* $f(x_M) \neq x_{M+1}$[7]*. Alors* (S) *devient* $\left\{ \begin{array}{lll} f(x_M) > x_{M+1} & \text{donc} & f(x_M) \geq x_{M+2} \\ f(x_{M+1}) < x_M & \text{donc} & f(x_{M+1}) \leq x_{M-1} \end{array} \right.$
  On a par conséquent : $f(x_{M+1}) \leq x_{M-1} < x_M < x_{M+1} < x_{M+2} \leq f(x_M)$ (α)
  Considérons à présent $[x_{M-1}, x_M]$ *et* $[x_{M+1}, x_{M+2}]$*. Alors :*
  $$\left\{ \begin{array}{l} \exists i \in [\![2, n-1]\!], I_i = [x_{M-1}, x_M] \\ \exists j \in [\![2, n-1]\!], I_j = [x_{M+1}, x_{M+2}] \end{array} \right.$$
  On a évidemment $i \neq j$*. Quitte à les échanger, supposons que* $j \geq 3$*. Par* (α) *et le TVI, on a* $f(\underbrace{[x_M, x_{M+1}]}_{=I_1}) \supset [f(x_M), f(x_{M+1})] \supset I_j$*, ce qui est* absurde *par* ii*).*
- *Si* $f(x_{M+1}) \neq x_{M-1}$*, c'est le même raisonnement.*

— *Si (a) est stricte, c'est encore une fois le même raisonnement.*

Conclusion n°1 : $f(x_M) = x_{M+1}$ *et* $f(x_{M+1}) = x_{M-1}$.
Or $f(\underbrace{[x_M, x_{M+1}]}_{=I_1}) \supset I_2$*. Par le point* iii*), il suffit de montrer que* $[x_{M-1}, x_M] \subset f(I_1)$ *pour établir que* $I_2 = [x_{M-1}, x_M]$*. En effet, s'il existait un autre intervalle de la forme* $I_l = [x_j, x_{j+1}] \subset f(I_1)$*, on aurait* $I_1 \longrightarrow I_l$*, absurde par le point* iii*).*
Par le TVI, on a $[x_{M-1}, x_M] \subset [f(x_{M+1}), f(x_M)] \subset f(I_1)$.
Conclusion n°2 : $I_2 = [x_{M-1}, x_M]$
On rappelle que par le lemme 2, on avait $x_M = \max\{x_i \in \mathcal{O}(x) | f(x_i) > x_i\}$.
On a donc $f(x_M) > x_M$ *et* $f(x_M) = x_{M+1}$*. Montrons que* $\left\{ \begin{array}{l} f(x_{M-1}) > x_{M-1} \\ f(x_{M-1}) \neq x_M \end{array} \right.$.
Supposons par l'absurde que $f(x_{M-1}) \leq x_{M-1}$*. On a alors*
$$f(x_{M-1}) \leq x_{M-1} < x_M < x_{M+1} = f(x_M)$$
Par le TVI, $f(I_2) \supset [f(x_{M-1}), f(x_M)]$*. Notons alors* $f(x_{M-1}) = x_i$ *avec* $0 \leq i \leq M-1$*. De plus,* $f(x_M) = x_{M+1}$*, donc :*
$$f(I_2) \supset [x_i, x_{M-1}] \supset [x_{M-1}, x_{M+1}] \supset I_1,$$
Absurde *car on aurait un point de période 3* $(n \geq 5)$*. Puis* $f(x_{M-1}) \neq x_M$*, sans quoi* $f^2(x_{M+1}) = x_M$*, et* $f^3(x_{M+1}) = x_{M+1}$*. De plus,* $x_{M+1} = f(x_M) \neq f(x_{M-1})$*. Donc* $f(x_{M-1}) \neq x_{M+1}$.
Par conséquent, $f(x_{M-1}) \geq x_{M+2}$ *Montrons que l'inégalité ne peut pas être stricte.*

∗ *Supposons qu'il existe un point de l'orbite noté* x_{j_1} *tel que* $x_{j_1} \in f(I_2)$ *et* $x_{j_1} < f(x_M)$*. L'ensemble* $A = \{x_k \in \mathcal{O}(x) | f(x_{M-1}) > x_k \geq x_{j_1}\}$ *est alors non vide (il contient* x_{j_1}*) et fini. Notons* x_l *son maximum. Alors,* $[x_l, f(x_M)] \subset f(I_2)$*. De plus,* $[f(x_M), x_{M+2}] \subset f(I_2)$*, absurde par le point* iii*).*

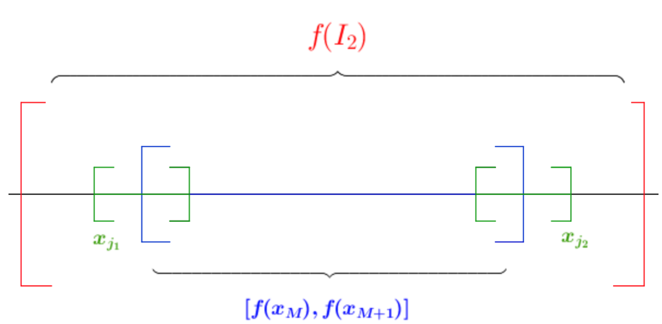

FIGURE 4 – On ne peut pas avoir x_{j_1} comme sur le dessin

* De même, on peut faire le même raisonnement à droite : supposons qu'il existe un point de l'orbite noté x_{j_2} tel que $x_{j_2} \in f(I_2)$ et $x_j > f(x_{M-1})$. L'ensemble $A = \{x_k \in \mathcal{O}(x) | x_{j_2} \geq x_k > f(x_M)\}$ est alors non vide (il contient x_{j_2}) et fini. En considérant son minimum, on conclut de même à une contradiction avec le point *iii*).
* Conclusion : $I_3 \subset [f(x_M), f(x_{M-1})]$. Supposons alors l'inégalité initiale stricte. On peut alors considérer x_{M+3}, et on a alors : $[f(x_M), x_{M+2}] \subset f(I_2)$, et $[x_{M+2}, x_{M+3}] \subset f(I_2)$, absurde par le point *iii*).

Donc $f(x_{M-1}) = x_{M+2}$, et il vient nécessairement $I_3 = [x_{M+1}, x_{M+2}]$. Puis, par une récurrence finie on peut montrer de même que les I_i se rangent sur l'axe réel en :

$$\underbrace{I_{n-1} \dots I_4 I_2}_{pairs} \quad I_1 \quad \underbrace{I_3 I_5 \dots I_{n-2}}_{impairs}$$

Ce qui aboutit à une description complète de l'orbite périodique :

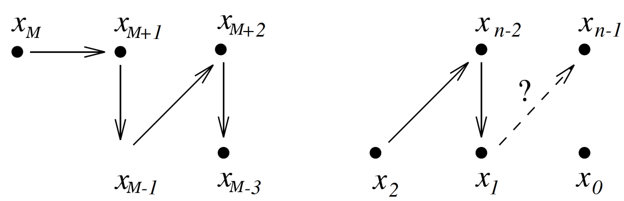

FIGURE 5 – Description de l'orbite périodique

Puis on a $f(x_2) = x_{n-2}$ (schéma). De plus :

$$f(I_{n-3}) = f([x_1, x_2]) \supset I_{n-2} = [x_{n-2}, x_{n-1}]$$

et $f(I_{n-3})$ ne contient aucun autre intervalle de l'orbite, sans quoi on aurait un chemin plus court, ce qui contredit ii). Donc $x_{n-1} = f(y)$ avec $y \in [x_1, x_2]$ or $y \in \mathcal{O}(x)$, donc nécessairement, $y = x_1$, d'où $f(x_1) = x_{n-1}$. Enfin, on a $f(I_{n-1}) \supset I_1$ Finalement, comme le montre le schéma,

$$f(I_{n-1}) \supset [x_M, x_{n-1}]$$

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que

$$[x_M, x_{n-1}] = \bigcup_{k \ impair} I_k$$

■

Corollaire 1

Si f admet un point de période n impaire différente de 1, alors :

— *Pour tout $m \geq n$, f a un point de période m.*

— *Pour tout $k \leq n$ pair, f a un point de période k.*

Démonstration :

— *Si n=3, cela à déjà été démontré[8]. Si $n \geq 5$, donnons-nous $m \geq n$. Par le lemme 5 on a le chemin :*

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1.$$

Il suffit de reboucler autant de fois sur I_1 que nécessaire pour avoir $f^m(I_1) \supset I_1$ et ainsi on a un point de période m par la proposition 3, ce qui achève la démonstration du premier point.

— *Soit k pair tel que $k \leq n$. Alors $n - k$ est impair donc par le lemme 5 il existe un chemin $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-k}$. Par conséquent, on a le chemin total :*

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & I_{n-k} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & I_{n-1} \arrow[r] \arrow[ll, bend right] & I_1 \end{tikzcd}$$

Il y a donc un "raccourci", et ainsi on a un sous-chemin : $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-k} \longrightarrow I_{n-k+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1}$.
De même on obtient un point de période k par la proposition 3. ■

Lemme 6

Si f a un point de période paire, alors f a un point de période 2.

Démonstration : *Par l'absurde, supposons que f n'ait aucun point de période 2. Soit donc $x \in I$ de période $n > 2$.*

- *Si n est impair, par le corollaire f a un point de période 2 : absurde.*
- *Ainsi, n est nécessairement pair. Par contraposée du lemme 4, il existe un sommet I_k distinct de I_1 tel que $I_k \longrightarrow I_1$. De plus, par le lemme 3, il existe un chemin I_1 vers I_k : $I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_k$.*
  Finalement on a le chemin : $I_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$. Prenons k minimal vérifiant cette propriété. Alors :
  - *les I_j sont deux à deux distincts par minimalité de k.*
  - *par un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 5 :*
    - *il n'existe par d'arrete de la forme $I_j \longrightarrow I_{j+l}$ avec $l \geq 2$*
    - *$k = n - 1$*
    - *il existe des arrêtes de la forme $I_{n-1} \longrightarrow I_{2i}$*

  Par conséquent, on a le chemin $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2}$ (car $n-2$ est pair). On a donc un chemin $I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$ et f a un point de période 2, absurde. ■

Lemme 7

- *Soit c un point de période n pour f (i.e $f^n(c) = c$). Soit $h \in \mathbb{N}$. Alors c est un point de période $\frac{n}{n \wedge h}$ pour f^h (i.e $f^{\frac{n}{n\wedge h}}(c) = c$).*
- *Réciproquement, si c est un point de période m pour f^h (i.e $f^{mh}(c) = c$), alors c est un point de période $\frac{mh}{d}$ pour f (i.e $f^{\frac{mh}{d}}(c) = c$) avec $d|h$ et $d \wedge m = 1$*

Démonstration :

-
  - *$\frac{nh}{n\wedge h}$ est divisible par n, donc $((f^h)^{\frac{n}{n\wedge h}})(c) = c$. Montrons alors que $\frac{n}{n\wedge h}$ est minimal.*
  - *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{kh}(c) = c$. Posons $m = \frac{n}{n\wedge h}$ et montrons que $m|k$, ce qui suffira à conclure.*
    On a $\left\{ \begin{array}{l} n = (h \wedge n) \times m \\ h = (h \wedge n) \times q \end{array} \right.$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $(m \wedge q) = 1$.
    Or $n|kh$ donc $m(h \wedge m) \mid kh$. Donc il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $lm(h \wedge m) = kh$. Donc $lm = kq$, donc $m|kp$.
    Or comme $m \wedge q = 1$, par le théorème de Gauss, on a bien $\boxed{m|k}$.
- *Soit c de période m pour f^h (en particulier, $f^{mh}(c) = c$). Soit n minimal tel que $f^n(c) = c$. Nécessairement, $n|mh$, donc $\exists d \in \mathbb{N}$ tel que $m = \frac{nd}{h}$.*
  Or par le premier point du lemme, on a $m = \frac{n}{h\wedge n}$, donc $\frac{h}{d} = h \wedge n$, d'où $h = d \times \underbrace{(h \wedge n)}_{\text{noté } k}$.
  Puis $h \wedge n = k$, donc $(dk) \wedge (mk) = k$, d'où $m \wedge d = 1$. Ainsi on a bien c de période $\boxed{n = \frac{mh}{d}}$ avec $\boxed{d|h}$ et $\boxed{d \wedge m = 1}$. ■

Passons à présent à la démonstration complète du théorème de Sarkovskii, dont on rappelle l'énoncé : supposons que f admette un point périodique de période n $\in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \succeq m$, f admet un point périodique de période m.

Démonstration : Nous allons distinguer plusieurs cas :

- Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer.
- Supposons que n s'écrive 2^k avec $k \geq 1$. Soit $m \preceq n$. Alors nécessairement, m s'écrit 2^l avec $0 \leq l \leq k$.
  - Si $l = 0$, par le lemme 2 $\boxed{f \text{ a un point de période } 1}$.

- Si $l > 0$, posons $h = \frac{m}{2} = 2^{l-1}$ et $g = f^h$. On a $2^{k-l+1} = \frac{n}{n \wedge h}$, donc par la première partie du lemme 7, g admet un point de période 2^{k-l+1}, qui est pair. Donc par le lemme 6, g a un point de période 2.

  Or par le deuxième point du lemme 7, f admet un point de période $\frac{2^{l-1} \times 2}{d}$ avec $\begin{cases} d | 2^{l-1} \\ d \wedge 2 = 1 \end{cases}$. Donc nécessairement, $d = 1$ et $\boxed{f \text{ a un point de période } 2^l = m}$.

— Si $n = p2^k$ avec p impair différent de 1 et $k \in \mathbb{N}$. Soit $m \preceq n$ et posons $g = f^{2^k}$.Trois cas se présentent :

  — Si $m = q2^k$ avec $q > 0$ pair. On a $p = \frac{n}{n \wedge 2^k}$, donc par le lemme 7 g a un point de période p. Appliquons le corollaire 1 à g : comme q est pair, g a un point c de période $\frac{q2^k}{d}$ avec $\begin{cases} d | 2^k \\ d \wedge q = 1 \end{cases}$. Or q est pair, donc nécessairement $d = 1$ donc $\boxed{c \text{ est un point de période } m \text{ pour f}}$

  — Si $m = q2^k$ avec q impair et $q > p$. Cette fois, $q > p$ donc par le corollaire 1 g a un point c de période q. Puis, par la deuxième partie du lemme 7, f a un point c de période $\frac{q2^k}{d}$ avec $\begin{cases} d | 2^k \\ d \wedge q = 1 \end{cases}$.

    Comme q est impair, on n'a plus nécessairement $d = 1$... Cependant, on sait que $d = 2^j$ avec $0 \leq j \leq k$. En notant $e = k - j$, c est de période $q2^e$ pour f. On peut alors écrire

$$m = \underbrace{(q2^{k-e})}_{pair} 2^e$$

    On se ramène donc au cas a).

  — Si $m = 2^l$ avec $l \leq k$: d'après le point a), f a un point de période 2^{k+1} (pour $q = 2$). Ainsi, en posant ñ $= 2^{k+1}$ qui est une puissance de 2, on peut appliquer le point ii), ce qui achève la preuve. ∎

6 Annexe

Démonstration de la proposition 1.

— Réflexivité :
Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On a $a = a$ donc $a \succeq a$.

— Antisymétrie :
Soit $(n, m) \in {\mathbb{N}^*}^2$, et supposons que $n \succeq m$ et $m \succeq n$.Gardons les mêmes notations que dans l'énoncé. Si $n = m$, c'est terminé. Sinon, en examinant chaque cas, on aboutit rapidement à une absurdité.

— Transitivité : Soit $(n, m, p) \in {\mathbb{N}^*}^3$, et supposons que $n \succeq m$ et $m \succeq p$. Introduisons quelques notations. Ecrivons : $\begin{cases} n &= 2^{v_2(n)}a \\ m &= 2^{v_2(m)}b \\ p &= 2^{v_2(p)}c \end{cases}$

  * Si $a = b = 1$ et $v_2(n) > v_2(m)$. On a $m \succ p$, $b = 1$ donc nécessairement $c = 1$. De plus on a $v_2(m) > v_2(p)$. Par transitivité, $v_2(n) > v_2(p)$ donc $n \succ p$ (c'est le cas 1).
  * Si $b = 1$ et $a \geq 2$. On a $m \succ p$ donc nécessairement $c = 1, b = 1$ et $v_2(m) > v_2(p)$. Alors, on a $c = 1$et $a \geq 2$, et peut conclure (c'est le cas 2).
  * Si $2 \leq a < b$ et $v_2(n) = v_2(m)$.
    - Si $c = 1$, on peut conclure (cas 2).
    - Si $c > b$ et $v_2(m) = v_2(p)$, on a en particulier $2 \leq a < c$ et $v_2(m) = v_2(p)$, on a donc bien $n > p$ par le cas 3.
    - Si $c \geq 2$ et $v_2(m) < v_2(p)$. On a $v_2(m) = v_2(n)$, donc $a, c \geq 2$ et $v_2(n) < v_2(p)$. On conclut par le cas 4.
  * Si $a, b \geq 2$ et $v_2(n) < v_2(m)$.
    - Si $c = 1$, on conclut par le cas 2.
    - Si $c > b$ et $v_2(m) = v_2(p)$, on a $a, c \geq 2$ et $v_2(n) < v_2(m) = v_2(p)$. On conclut par le cas 4.
    - Si $c \geq 2$ et $v_2(m) < v_2(p)$, on a $a, c \geq 2$ et $v_2(n) < v_2(p)$. On conclut par le cas 4.

— Ordre total :
Soit $(n, m) \in {\mathbb{N}^*}^2$. Grâce à l'existence et à l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, on peut introduire les notations de l'énoncé.

  * Si $n = m$, on peut bien comparer n et m, car on a $n \succeq m$ et $m \succeq n$.
  * Si $n \neq m$:
    - Si $a = b = 1$, on a nécessairement $v_2(n) > v_2(m)$ ou $v_2(n) < v_2(m)$.
    - Si $a \neq 1$ et $b = 1$, on a $a \geq 2$, on est donc dans le deuxième cas.
    - Si $b \neq 1$ et $a = 1$, idem.
    - Si $a, b \neq 1$, on a $a, b \geq 2$. Si les deux valuations sont égales, on est dans le cas 3, sinon, on est dans le cas 4.

Références

[1] O. Benoist. Le théorème de sarkovskii. 2003.

[2] J.-Y. Briend. Le théorème de sarkovskii. *Le journal de maths des élèves*, 1(3), 1995.