Equations de Lorenz et mise en évidence d'un attracteur étrange

Reda Belhaj

2018

Introduction : modèle de Rayleigh

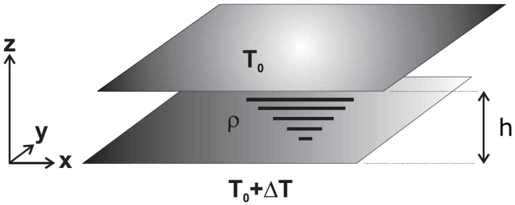

Figure – Modèle étudié

Trois évolutions :

1. δT petit : conduction seule, pas de mouvement d'ensemble.
2. δT élevé : comportement très complexe.
3. Entre les deux ? Le fluide s'organise en rouleaux.

Equations de Saltzman

Equations de base : Navier Stokes (1) et équation de la chaleur (2) :

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \nabla P + \mu\Delta\vec{v} \tag{1}$$

$$\frac{DT}{dt} = \mathcal{D}\Delta T \tag{2}$$

On utilise des variables sans dimension, et on introduit : $\sigma := \frac{\mu}{\rho_0 \mathcal{D}}$
$R := \frac{\alpha g h^3 \rho_0 \delta T}{\mu \mathcal{D}}$

$$T(x,z,t) = T_{repos}(z) + (\delta T)\theta(x,z,t)$$

$$(v_x, v_z) = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$$

(on admet l'existence d'une telle fonction)
On obtient les équations de Saltzman :

Equations de Saltzman

$$\partial_t \Delta\psi + \{\Delta\psi, \psi\} - R\sigma\partial_x\theta - \sigma\Delta^2\psi = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t \theta - \{\psi, \theta\} + \partial_x \psi - \Delta\theta = 0 \quad (4)$$

Décomposition en série de Fourier

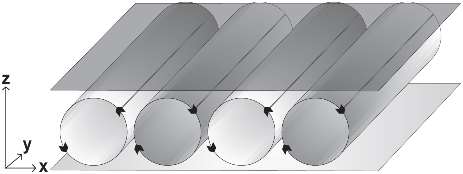

Figure – Rouleaux de Bénard

$$\psi(x,z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_{m,n}(t) \sin(\pi m z) \sin\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$$

$$\theta(x,z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \theta_{m,n}(t) \sin(\pi m z) \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)$$

Troncature de Lorenz

Troncature de Lorenz

$$\psi(x,z,t) = \tilde{X}(t)\sin(\pi z)\sin\left(2\pi\frac{x}{a}\right)$$

$$\theta(x,z,t) = \tilde{Y}(t)\sin(\pi z)\cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right) - \tilde{Z}(t)\sin(2\pi z).$$

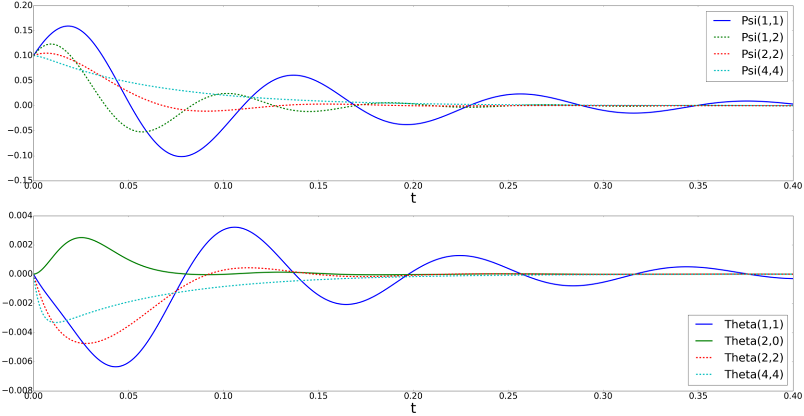

Figure – Evolution dans le temps de quelques modes de la décomposition

Equations de Lorenz

On obtient par changement d'échelle et en introduisant

$$r = \frac{4R}{\pi^4 a^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3}, b = \frac{4}{1 + \frac{4}{a^2}}$$

le système d'équations de Lorenz :

Système de Lorenz

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} & = & \sigma(-X + Y) \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\tau} & = & rX - Y - XZ \\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\tau} & = & XY - bZ \end{array} \right.$$

Stabilité du système (au sens de Liapounov)

On considère l'équation différentielle :

$$y' = Ay + f(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

f est une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$ supposée de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 1

Le problème admet la solution définie par

$$\forall t \in I, y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) \mathrm{d}s.$$

Dans toute la suite $I = [0, +\infty[$.

Equilibre stable, asymptotiquement stable

Définition 1 (*Equilibre stable*)

On dit que y_0 *est un équilibre stable si pour tout voisinage* U *de* y_0*, il existe un voisinage* V *de* y_0 *tel que, pour tout* $\tilde{y}_0 \in V$

- *L'équation avec la condition initiale* $y(t = 0) = \tilde{y}_0 \in V$ *admet une solution notée* $y(t, \tilde{y}_0)$*.*
- $\forall t \geq 0, y(t, \tilde{y}_0) \in U$

Définition 2 (*Equilibre asymptotiquement stable*)

On dit que y_0 *est un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable et qu'il existe un voisinage* W *de* y_0 *tel que pour tout* $\tilde{y}_0 \in W$

- $y(t, \tilde{y}_0)$ *est bien définie.*
- $\lim_{t \to +\infty} y(t, \tilde{y}_0) = y_0$

Etude pratique de la stabilité d'une équation différentielle

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les solutions stationnaires du système $y' = Ay$ sont asymptotiquement stables si et seulement si pour tout $\lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$.

Théorème 2

On considère l'équation $y' = f(y)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que y_0 est un point stationnaire. Si les valeurs propres de la différentielle $\mathrm{d}f(y_0)$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors y_0 est asymptotiquement stable.

Etude du système

Le modèle des rouleaux n'est valable que pour des petites valeurs de δT. Ceci motive la proposition :

Proposition 2

Soit a la période spatiale telle que la solution correspondant au fluide au repos devienne instable pour la plus petite valeur de δT. Alors $a = 2\sqrt{2}$.

Cela revient à chercher a tel que (X=Y=Z=0) devienne instable pour la plus petite valeur de R.

Paramètres habituels : $r = 28, b = 8/3, \sigma = 10$. Problème : pour $r > 1$ (les valeurs de r pour les quelles il y a instabilité, donc celles qui nous intéressent), les modes que nous avons négligés ne sont peut être pas négligeables.

On considère l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - (r+1)z = m,$$

où m est un réel positif.
Si une trajectoire entre dans un tel ellipsoïde, elle y reste pour toujours.

Proposition 3

Soit $h : \mathbb{R}^n \to R$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*, on note* $F = h^{-1}(]-\infty, 0])$ *Soit* $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *solution de* $X' = f(X)$*. On pose* $g(t) = h(x(t), y(t), z(t))$*. On suppose que pour tout* t*, si* $(x(t), y(t), z(t)) \in h^{-1}(\{0\})$ *alors* $g'(t) < 0$*. Soit* t_0 *tel que* $X(t_0) \in F$*. Alors :* $\forall t \geq t_0, X(t) \in F$

Ici : $g(t) = \frac{x(t)^2}{2\sigma} + \frac{y(t)^2}{2} + \frac{z(t)^2}{2} - (r+1)z(t) - m$
$g'(t) = x'x/\sigma + yy' + (z - (r+1))z' =$
$x(y-x) + y(rx - y - xz) + (z - (r+1))(-bz + xy)$.
On trouve finalement

$$g'(t) = -x^2 - y^2 - bz^2 + (1+r)bz$$

Ainsi, en prenant m assez grand, la condition $g(x(t), y(t), z(t)) = 0$ entraîne $g'(t) < 0$.

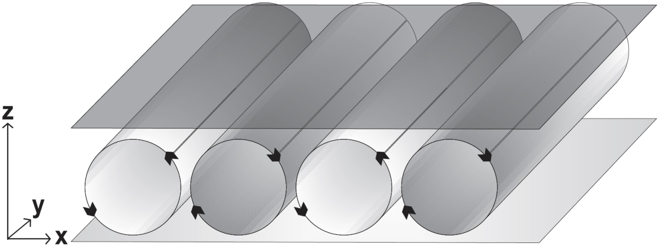

Figure – Rouleaux de Bénard

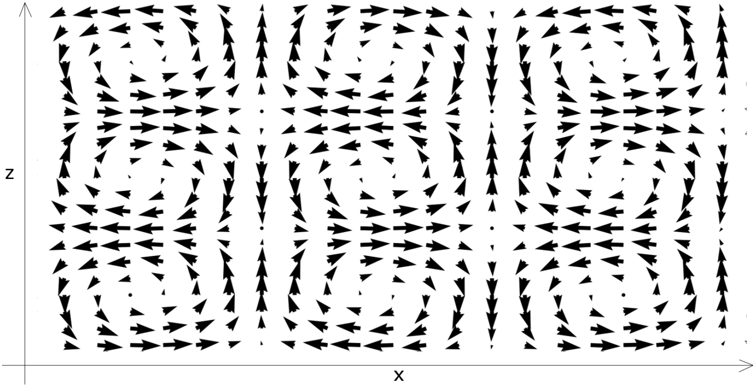

Figure – Champ des vecteurs vitesses au sein du fluide (Python)

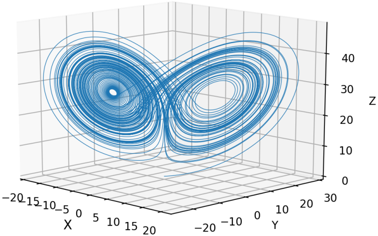

Figure – Simulation pour $r = 28$

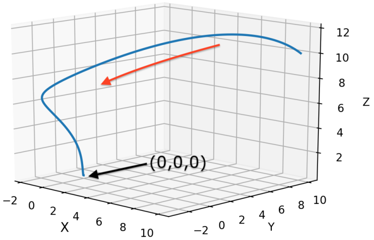

Figure – Simulation pour $r = 0.2$

Proposition 4

Soit a la période spatiale telle que la solution correspondant au fluide au repos devienne instable pour la plus petite valeur de δT. Alors $a = 2\sqrt{2}$.

Cela revient à chercher a tel que (X=Y=Z=0) devienne instable pour la plus petite valeur de R.

Démonstration : On linéarise le système d'équations autour du point fixe (0,0,0). On obtient

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

L'équation en Z est indépendante. On note $M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}(M) = -\sigma - 1 < 0$, la somme des valeurs propres est négative, elles ne peuvent pas être toutes les deux positives, et donc la condition est équivalente à $\det M = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, soit encore

$$\sigma(1-r) < 0 \Leftrightarrow r > 1 \Leftrightarrow R > \frac{\pi^4 a^2}{4} \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3 .$$

Le seuil d'instabilité est $\frac{\pi^4 a^2}{4} \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3$, minimal pour $a = 2\sqrt{2}$. ∎

Proposition 5

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $F = f^{-1}(]-\infty, 0])$. Soit X un champ de vecteurs défini au voisinage de tout point de F, vérifiant :

$$\forall x \in f^{-1}(\{0\}), \mathrm{d}f(x).X(x) < 0.$$

Soit x une solution de $x' = X(x)$, telle que $x(t_0) \in F$. Alors :
$\forall t \geq t_0, x(t) \in F$.

Démonstration : On note $g(t) = f(x(t))$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe un $t > t_0$ tel que $f(x(t)) > 0$, on s'intéresse à la borne inférieure t_1 de cet ensemble, qui vérifie donc $f(x(t_1)) \geq 0$. Pour $t \in [t_0, t_1], f(x(t)) < 0$, donc par passage à la limite, $f(x(t_1)) = 0$. Par hypothèse on a alors $\mathrm{d}f(x(t_1)).X(x(t_1)) < 0$, soit $g'(t_1) < 0$. Donc pour t au voisinage de t_1 on a

$$g(t) \sim (t - t_1)g'(t_1),$$

qui contredit la minimalité de t_1. ∎

Dans notre cas : $g(t) = \frac{x(t)^2}{2\sigma} + \frac{y(t)^2}{2} + \frac{z(t)^2}{2} - (r+1)z(t) - m$
$g'(t) = x'x/\sigma + yy' + (z - (r+1))z' =$
$x(y - x) + y(rx - y - xz) + (z - (r+1))(-bz + xy)$.
On trouve finalement

$$g'(t) = -x^2 - y^2 - bz^2 + (1 + r)bz$$

Ainsi, en prenant m assez grand, la condition $g(x(t), y(t), z(t)) = 0$ entraîne $g'(t) < 0$.

Théorème 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Les solutions stationnaires du système* $y' = Ay$ *sont asymptotiquement stables si et seulement si pour tout* $\lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$.

Démonstration : Il suffit d'étudier le point fixe 0.

$\Rightarrow$ Contraposée. Soit λ de partie réelle positive, soit y_0 un vecteur propre associé. On a

$$\|y(t,y_0)\| = \|e^{tA}y_0\| = \left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\lambda^k y_0}{k!}\right\| = \|e^{\lambda t}y_0\| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|y_0\|$$

$\|y(t,y_0)\|$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

$\Leftarrow$ Stabilité : On trigonalise A finement, et si N est nilpotente, les coefficients de $\exp(t(N+\lambda I))$ sont de la forme $e^{\lambda t}P(t)$, On pose $\mu = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda < 0$.

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \|y(t,y_0)\| = \|e^{tA}y_0\| \leq CP(t)e^{\mu t} = KP(t)e^{\mu t},$$

où C, K sont des constantes. ∎

Théorème 4

On considère l'équation $y' = f(y)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Si les valeurs propres de la différentielle $\mathrm{d}f(0)$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors 0 est asymptotiquement stable.

Démonstration : On pose $A = \mathrm{d}f(0), f(y) = Ay + r(y)$.
L'équation différentielle : $y' = Ay + r(y)$, de solutions :

$$y(t, y_0) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}r(y(s, y_0))ds.$$

$$\forall t \geq 0, \|e^{At}y_0\| \leq M'e^{-\sigma t}\|y_0\|.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $\|y\| \leq \delta \Rightarrow \|r(y)\| \leq \frac{\sigma}{2M'}\|y\|$.
Soit y_0 tel que $\|y_0\| \leq \frac{\delta}{2M'}$. Soit $T \geq 0$ tel que
$\forall t \in [0, T], \|y(t, y_0)\| \leq \delta$
Ainsi, on a après application du lemme de Gronwall

$$\|y(t, y_0)\| \leq M' e^{-\frac{\sigma t}{2}} \|y_0\|$$

$\forall t \in [0, T], \|y(t, y_0)\| \leq \delta/2,$

La majoration que nous avons obtenue reste vraie pour tout $t \geq 0$ (par l'absurde).

Lemme 1 (*de Gronwall*)

Soit φ, ψ *des fonctions continues sur le segment* $[a, b]$ *à valeurs positives, vérifiant :*

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right).$$

Démonstration : On étudie les variations de la fonction définie par

$$f(t) = \frac{K + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)\mathrm{d}s}{\exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)}$$

.